

Euler-Picardsche Differentialgleichungen und Arithmetische Ball-Uniformisierungen

R.-P. Holzapfel,
chem. Akademie der Wiss., Humboldt-Univ. Berlin

Zusammenfassung.

Was haben partielle Differentialgleichungen der Gestalt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} + \frac{1}{t-s} \left(a \frac{\partial}{\partial t} F - c \frac{\partial}{\partial s} F \right) = 0, \quad F = F(s, t).$$

mit dem Produkt von L-Reihen-Werten

$$L(\chi_K, -2) \cdot L(\chi_K, -4) \cdot \dots \cdot L(\chi_K, -2q)$$

(des Dirichlet-Charakters χ_K) zu tun? Auf den Zusammenhang stößt man bei der Untersuchung der Verallgemeinerung $y^m = p_n(x)$ hyperelliptischer Kurven. Variiert man (bei festem m, n) die Polynome p_n (n -ten Grades), so erhält man eine algebraische Kurvenfamilie \mathcal{Y}/S . Diesem ist ein Picard-Fuchssches System partieller Differentialgleichungen zugeordnet, das eine Variation m -ter Wurzel-Integrale als Lösungen hat. Im günstigen Falle lassen sich diese multivalenten Lösungen durch den n -dimensionalen Ball $\mathbb{B}^n : |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1$ uniformisieren. Nun erhebt sich die Frage, welche der zugehörigen Monodromie-Gruppen gleichzeitig arithmetische Gruppen der Theorie der Shimura-Varietäten sind. Um sie herauszufiltern, muß man die Kodaira-Klassifikation algebraischer Mannigfaltigkeiten heranziehen. Dazu ist es nötig, die zahlentheoretische Berechnung von Volumina des Volumens arithmetischer Ball-Gruppen durchzuführen. Auf diese Weise gelangt man zum obigen L-Werte-Produkt. Für die gefundenen Shimura-Flächen liegen interessante Klassifikations-Resultate vor. Auch die zugehörigen Modulformen haben besondere zahlentheoretische Eigenschaften. Darüber hinaus projizieren Modulformen das Tranchieren des Balles in arithmetische Scheiben auf ebene Shimura-Kurven. Diese werden (auch) in der algebraischen Kodierungs-Theorie gebraucht.

Zu den Beweisen wird eine Übersicht gegeben, die sich hauptsächlich auf Ergebnisse der 2. Hälfte des 20. Jahrhunderts namhafter Mathematiker stützt.